Thứ ngày tháng năm

CHƯƠNG 1 SỐ PHỨC

tự đọc

Modun $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

. Khi một câu dạng:

cho số phức $z = a + bi$

Tìm phần thực a, tìm phần ảo b

hoặc modun $|z|$ của số phức z

bài tập Cho $z = (1+i\sqrt{3})^{17}$

hay $z = (1-i\sqrt{3})^{18}$

Tìm phần thực, phần ảo của z

Hướng dẫn

$z = (1+i\sqrt{3})^{17}$

Cách 1 Casio

Cách 2 Tách $z = (1+i\sqrt{3})^{16}.(1+i\sqrt{3})^{1}$

Nháp gọi $w = (1+i\sqrt{3})^{16} = [(1+i\sqrt{3})^2]^8$

$= [1 + 2i\sqrt{3} + 3i^2]^8$

T/c $i^2 = -1$. $i^3 = i^2.i = -i$

$i^4 = (i^2)^2 = 1$

$\Rightarrow w = (-2 + 2\sqrt{3}i)^8 = 256(-1+\sqrt{3}i)^8$

$= 256[(-1+\sqrt{3}i)^2]^4$

$= 256[-2-2\sqrt{3}i]^4$

$= 256(-2)^4(1+\sqrt{3}i)^4$

1

• Casio $Pol(1;\sqrt{3}) = (r,\varphi) = (2;60^\circ) = (2;\frac{\pi}{3})$

$= 4096\left[(1+\sqrt{3}i)^2\right]^2$

$= 4096\left[-2+2\sqrt{3}i\right]^2$

$= 16384(-1+\sqrt{3}i)^2$

$= 16384(1-2\sqrt{3}i+(\sqrt{3}i)^2)$

$= 16384(-2-2\sqrt{3}i)$

$= -32768(1+\sqrt{3}i)$

Thay w vào z $= -32768(1+\sqrt{3}i).(1+i\sqrt{3})$

$= -32768(-2+2\sqrt{3}i)$

$= \underbrace{65536}_{\text{phần thực}} - \underbrace{113511,6817i}_{\text{phần ảo}}$

Cách 3 Với $z = (1+i\sqrt{3})^{17}$

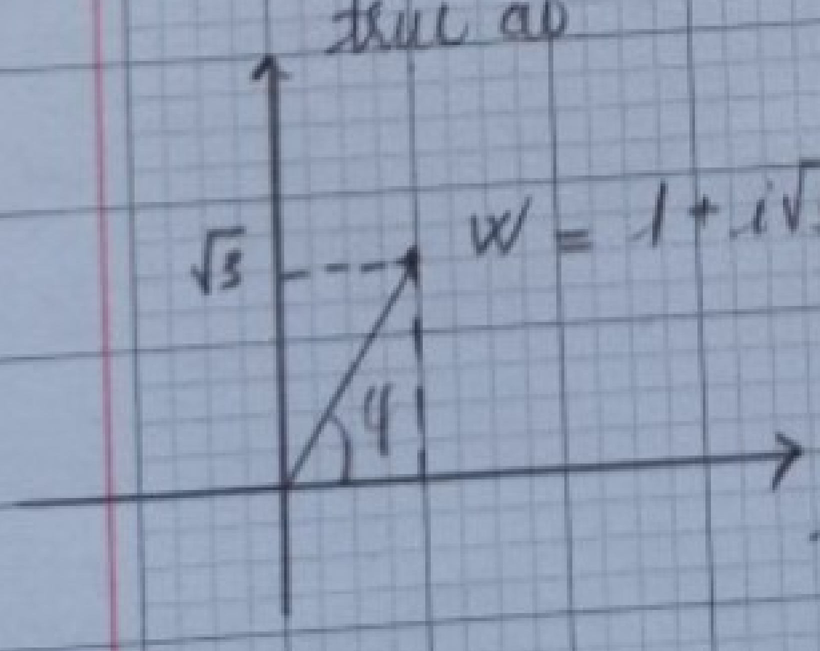
$w = 1+i\sqrt{3}$

Đưa w về dạng lượng giác

$w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Tính $r = |w| = \sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$

Tính góc φ (đọc argument của số phức w)



$\tan\varphi = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

$\varphi = \frac{\pi}{3}$

do $w \in$ góc $\frac{1}{4}$ mf

Thứ ngày tháng năm

Vậy $w = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

là dạng lượng giác

$\Rightarrow z = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{17}$

$= 2^{17} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{17}$

Dùng công thức Movire

$$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$

$\Rightarrow z = 2^{17}\left(\cos\frac{17\pi}{3} + i\sin\frac{17\pi}{3}\right)$

$z = 2^{17}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= \underbrace{2^{16}}_{\text{phần thực}} - \underbrace{2^{16}\sqrt{3}}_{\text{phần ảo}}i$

Bài tập (thi rồi) Phần ảo của số phức

$(1-i\sqrt{3})^7 \cdot i \cdot (-i-\sqrt{3})$

A $128\sqrt{3}$

B $-128\sqrt{3}$

C $258\sqrt{3}$

D $-256\sqrt{3}$

$w = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$

$r = |w| = 2$

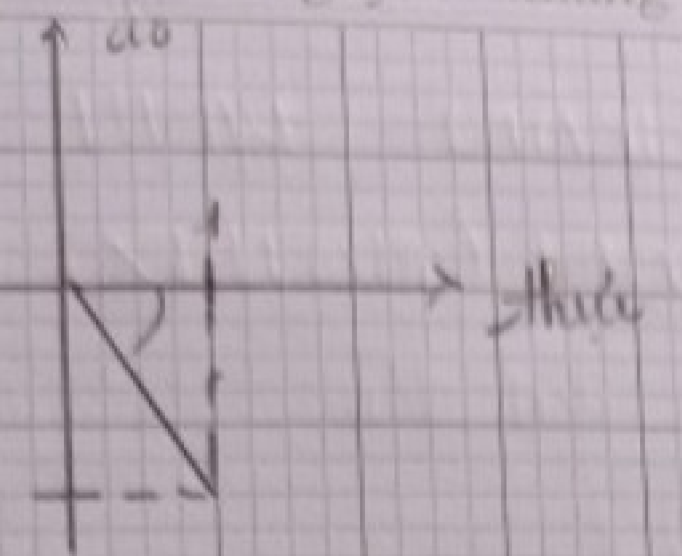
$z = (1-i\sqrt{3})^7 \cdot (-i^2 - \sqrt{3}i)$

$= (1-i\sqrt{3})^7 \cdot (1 - \sqrt{3}i)$

$= (1-i\sqrt{3})^8$

Thứ ngày tháng năm

Tính góc φ



$\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$

$z = 2\left(-\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^7 \cdot i \cdot (-i - \sqrt{3})$

$= 2\left(-\cos\dfrac{7\pi}{3} - i\sin\dfrac{7\pi}{3}\right)$

$= 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} i\right) \cdot i \, (-i - \sqrt{3})$

~~Thủ thuật~~

Với $z = (a + bi)^n$

$\Rightarrow z \begin{cases} a(|w|)^{n-1} + b(|w|)^{n-1} & \text{khi n chẵn} \\ a(|w|)^{n-1} - b(|w|)^{n-1} & \text{khi n lẻ} \end{cases}$

$\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{I}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{Z}$

$\frac{a}{b}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$,

CHƯƠNG II MA TRẬN - ĐỊNH THỨC

Bài 1 MA TRẬN (MATRIX)

1. Định nghĩa: Một ma trận, đặt tên A (hay $B, C, X, Y, \ldots$) có kích cỡ $m \times n$ gồm m dòng và n cột là hình chữ nhật chứa $m.n$ phần tử sau

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

. Phần tử a_{ij} nằm ở dòng i và cột j của ma trận A

. Khi số dòng = số cột tức $m = n$ thì gọi A là ma trận vuông cấp n

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 9 \\ 2 & 7 & 15 \end{pmatrix}$

cỡ 2×3

Phần tử $a_{11} = 1/2$, $a_{13} = 9, \ldots$

Chứa $2.3 = 6$ phtử

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ là ma trận vuông cấp 2

2. Một số ma trận dạng đặc biệt

1. Ma trận dòng thì chỉ có 1 dòng

VD $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ cỡ 1 × 4

dòng cột

2. Ma trận cột thì chỉ có 1 cột

VD $\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ cỡ 4 × 1

dòng cột

$[\;]_{m \times n}$

3. Ma trận không, ký hiệu $\mathbb{O}$

$$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

mọi phần tử đều là số 0

4. Ma trận đường chéo thì vuông có dạng

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

dọc đường chéo chính của ma trận vuông

5. Ma trận tam giác trên (tương ứng dưới)

VIBOOK INTERNATIONAL

phải vuông có dạng

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Bên dưới đ/chéo chính toàn 0

t.ùng tam giác dưới

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Bên trên đ/chéo chính toàn 0

6. Ma trận chuyển vị

Cho tc $A = (a_{ij})$ cỡ $m \times n$ tùy ý

Viết (đổi) các dòng thành cột tương ứng thu được ma trận ký hiệu A^T gọi là ma trận chỉ vị của ma trận A

VD Cho

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & b \\ 3 & c \end{pmatrix}$$ cỡ 3×2

$$\Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Thứ ngày tháng năm

Học nhanh

$(A^T)^T = A$ $\qquad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$(A.B)^T = B^T . A^T$

7. Ma trận đơn vị, ký hiệu I là ma trận vuông có đg chéo chính toàn số 1

VD: Cấp 2 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

Cấp 3 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Các phép toán trên Ma trận

① So sánh bằng

Hai ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$ và $(b_{ij})_{m \times n}$

gọi là bằng nhau

viết: $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} \text{. cùng cỡ } m \times n \\ . a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j \end{cases}$

VD. Tìm $x \in \mathbb{R}$ để $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & x^2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

bằng nhau

Để $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} \text{cùng cỡ } 2\times 2 \text{ đúng} \\ x = x^2 \end{cases}$

$\Rightarrow x = x^2$

$\Rightarrow x(1-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

② Phép cộng (trừ) 2 ma trận cùng cỡ

Định nghĩa Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ cùng cỡ $m\times n$

Khi đó tổng $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$

hiệu $A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}$

VD: Cộng 2 ma trận

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 & a \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}_{2\times 3} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & x \\ 2 & -2 & y \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & a+x \\ 3 & -2 & b+y \end{pmatrix}$$

Tính chất

- Tính giao hoán của phép cộng $A + B = B + A$
- Tính kết hợp $A + B + C = (A+B) + C = A + (B + C)$
- $A + \mathbb{O} = A$

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} \neq B_{m\times n} \cdot A_{n\times p}$$

Thứ ngày tháng năm

③ Phép nhân 1 số với ma trận

<u>Định nghĩa</u> Cho số α và ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ tùy ý

Tích $\alpha . A = (\alpha . a_{ij})_{m\times n}$

▨ Không có phép toán $\alpha \pm A$ (ma trận)

VD Nhân $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3}/2 \\ -5\sqrt{3}/2 & \sqrt{3} & 3\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

<u>Tính chất</u>

- $(\alpha . \beta) . A = (\alpha . A) . \beta = \alpha (\beta . A)$
- $\alpha . (A + B) = \alpha . A + \alpha . B$
- $(-1) . A = -A \qquad 0 . A = \text{⓪}$

④ Phép nhân 2 ma trận

<u>Định nghĩa</u> Cho $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{n\times p}$

khi đó <u>tích</u> $A . B = \left(c_{ij} \right)_{m\times p}$

Trong đó c_{ij} phần tử nằm ở dòng i cột j tính theo quy tắc

$c_{ij} = $ (dòng i của A) $\times$ (cột j của B)

$$= (a_{i1} \; a_{i2} \ldots a_{in}) \times \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Mũi 50 Mũi 10

8 15 +

Thứ ngày tháng năm

Ghi nhớ - Muốn $A \cdot B$ (A bên trái B) thì ĐK số cột của A phải = số dòng của B. Tương tự $B \cdot A$

- Phần lớn kết quả $A \cdot B \neq B \cdot A$
- Sơ đồ

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = (c_{ij})_{m \times p}$$

VD. Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & -5 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

• $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

$(c_{ij})_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -7 & 6 \\ -34 & 39 & -21 \end{pmatrix}$

* c_{11} $\underbrace{(3 \quad 2)}_{\text{dòng 1 A}} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}_{\text{cột 1 B}} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 18$

c_{12} $(3 \quad 2) \times \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}_{\text{cột 2 B}} = 3 + (-10) = -7$

c_{13} $(3 \quad 2) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\text{cột 3 B}} = 0 + 6 = 6$

* c_{21} $\begin{pmatrix} 1 & -7 \end{pmatrix}_{\text{dòng } 2A} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}_{\text{cột } 1B} = 8 - 42 = -34$

c_{22} $\begin{pmatrix} 1 & -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}_{\text{cột } 2B} = 1 + 35 = 36$

cột_{23} $\begin{pmatrix} 1 & -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\text{cột } 3B} = -21$

• $B \times A = B_{2\times 3} \cdot A_{2\times 2}$ k nhân được

Cách Bấm Casio Webite Youtube.com

Casio ma trận

Tính chất

- Tính kết hợp $A.B.C = (AB).C = A(B.C)$
- Tính phân phối $A(B+C) = AB + A.C$
- $A.I = I A = A$

▨ Lũy thừa của ma trận vuông

$A = (a_{ij})_{n\times n}$ cấp n

Ta có $A^1 = A$ $A^3 = A^2.A$

$A^2 = A.A$

tổng quát $A^k = A^{k-1}.A$ với $1 \leq k \in N$

Học kỹ $A^0 = I$ (ma trận đơn vị)

Với I ma trận đơn vị cùng cấp với A

$\overrightarrow{m} \times n \downarrow$

Thứ ngày tháng năm

VD $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}_{1\times 3} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}_{3\times 1} = (62)_{1\times 1}$

Ma trận cấp 1

Bài 2 ĐỊNH THỨC (Determinants) Của Ma Trận Vuông

1 Định nghĩa

Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ma trận vuông cấp n

Định thức của A là 1 số duy nhất ký hiệu det(A) hay |A|

2 Định thức cấp 1

Cho ma trận $A = (a_{11})_{1\times 1}$ cấp 1

Ta có $\det(A) = |a_{11}| = a_{11}$ (= chính nó)

VD $|5| = 5$; $|-9| = -9$

3. Định thức cấp 2

Cho $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ là ma trận cấp 2

Khi đó

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

VD: $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2.6 - 3(-5) = 27$

4. Định thức cấp 3

Cho $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ ma trận cấp 3

Định thức

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{(-1)^{1+1} \cdot a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{M_{11}}}_{A_{11}} + (-1)^{1+2} a_{12} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{M_{12}} + (-1)^{1+3} a_{13} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{M_{13}}$$

$$= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$$

Học kỹ . Đặt $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

đọc là <u>phần bù đại số</u> (confactor)

của phần tử $a_{ij} \in A$; còn M_{ij} đọc là <u>định thức con</u>

(Minor) nhận được từ $\det(A)$ bằng cách bỏ đi dòng i và

cột j tương ứng

Ghi nhớ - Cách tính trên gọi là khai triển theo dòng 1.

Có thể chọn dòng và cột tùy ý.

Thủ thuật : Để ↓ tính toán thì chọn dòng hoặc cột chứa nhiều số 0 nhất để khai triển

- Định thức cấp 3 có thể tính theo quy tắc (Sarrus) như sau :

Thứ ngày tháng năm

Lập sơ đồ

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Nhớ thêm

$\begin{cases} \text{cột 4 giống cột 1} \\ \text{cột 5 giống cột 2} \end{cases}$

$$\det(A) = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

5. Định thức cấp 4

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{4\times4}$ vuông cấp 4

Cách tính $\det(A)$:

Chọn 1 dòng hoặc 1 cột, chứa nhiều 0 → khai tỉ qua cấp 3

VD Tính định thức cấp 3

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & +4 & 7 \\ 8 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

Cách 1 Cas10

Cách 2 Casious

Cách 3 Chọn 1 dòng hoặc 1 cột chứa nhi 0 khai tỉ qua cấp 2

$\rightarrow \det(A) \xrightarrow[\text{cột [2]}]{\text{khai tr}} (-1)^{1+2}.(-5)\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}(-4)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$

$+ (-1)^{3+2}.\ 0 . \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$

$= -174.$

6. Tính chất của định thức

T/c 1 $\det(A^T) = \det(A)$

T/c 2 - Định thức $= 0$ khi có 1 dòng hoặc cột chứa toàn số 0

- Định thức $= 0$ khi có 2 dòng hoặc 2 cột giống nhau hoặc tỉ lệ nhau

tỉ lệ

dòng 3 tỉ lệ 2 lần dòng 2

$$\begin{vmatrix} 2019 & 2020 & 2021 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & -6 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

T/c 3. Khi đổi vị trí 2 dòng hoặc 2 cột thì định thức đổi dấu

T/c 4. Thừa số chung trên 1 dòng hoặc cột đưa đc ra khỏi dấu định thức thành tích số

$$\begin{vmatrix} \alpha.a & \alpha.b & \alpha.c \\ x & y & z \\ m.u & mv & mw \end{vmatrix} = \alpha . m . \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

T/c 5 (Tách)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1+y_1 & x_2+y_2 & x_3+y_3 \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ u & v & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

Tính chất, tách cho cột

T/c 6 - Định thức k đổi khi lấy dòng này + hoặc - với k lần dòng ≠ (tương tự cho cột)

Tính chất xinh đẹp

1. Cho A, B ma trận vuông cấp n

Khi đó $\det(A.B) = \det(A) \times \det(B)$

Từ đó, suy ra

$$\det(A^k) = \det(\underbrace{A \times A \times A \times \ldots \times A}_{k \text{ lần}}) = \det(A) \times \det(A) \times \ldots \det$$
$$= (\det A)^k$$

Vậy $\det(A^k) = (\det A)^k$

2. Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ cấp n và số α

- $\det(\alpha . A) = (\alpha)^n \times \det(A)$
- $\det(-A) = \det(-1 \times A) = (-1)^n \times \det(A)$

3. Định thức của ma trận Δ, đg chéo thì = tích các phần tử nằm trên đg chéo chính

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} . a_{22} . a_{33}$$

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{vmatrix} = d_1 \cdot d_2 \cdot d_3$$

Suy ra $|I| = 1$

Ví dụ Cho A ma trận cấp 4 biết

$\det(A) = 2021$

Tính $\det\left(\frac{1}{9} \cdot A\right)$; $\det(A^6)$ và $\det(-A)$

$$\det\left(\frac{1}{9} \cdot A\right) = \left(\frac{1}{9}\right)^4 \det(A) = \frac{1}{6521} \cdot 2021 = \frac{2021}{6521}$$

$$\det(A^6) = (\det A)^6 = 2021^6$$

$$\det(-A) = (-1)^4 \cdot \det A = +2021$$

Ví dụ Tính định thức cấp 4

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -6 \\ 4 & 5 & 8 & 12 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

Cách 1 Casio

Cách 2 chọn dòng hoặc cột khai triển qua cấp 3

$$\Rightarrow D = (-1)^{1+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} 5 & 8 & 12 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 4 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 0 + 0$$

k/t theo cột

Thứ ngày tháng năm

Bài 3 MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

Của Ma Trận Vuông

1 Định nghĩa

Cho trước $A = (a_{ij})$ vuông cấp n. Nếu tồn tại ma trận B vuông cấp n sao cho thoả

$A.B = B.A = I_n$

thì nói B là ma trận nghịch đảo của A

Ký hiệu B bởi A^{-1} ma trận nghịch đảo

Vậy $A.A^{-1} = A^{-1}A = I_n$

2 Cần biết

* Từ $A.A^{-1} = I_n$

$\Rightarrow \det(A.A^{-1}) = \det(I_n)$

$\Leftrightarrow \det(A) \times \det(A^{-1}) = 1$

$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ Với $\det(A) \neq 0$

* ĐK để ma trận vuông A có ma trận nghịch đảo

$\Longleftrightarrow \det A \neq 0$

$\Longleftrightarrow$ ma trận vuông A k' suy biến

3. Thuật toán tìm (ma trận nghịch đảo ma trận A) A^{-1}

Cho tc $A = (a_{ij})$ ma trận cấp n

B, Tính $\det(A)$

+ nếu det(A) = 0 → k có A^{-1} (thuật toán kết thúc)
+ nếu det(A) ≠ 0 → có A^{-1} → B_2

B_2 Công thức tìm A^{-1}

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times P_A}$$

Trong đó P_A gọi là <u>ma trận phụ hợp</u> của ma trận A (Vuông cùng cấp A) có dạng

$$P_A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

Với $A_{ij} = (-1)^{i+j} . M_{ij}$

phần bù đại số của $a_{ij} \in A$

định thức con

VD Tìm A^{-1} (nếu có) của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \\ 6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Cách 1 CaSiO → ra A^{-1}

Cách 2 Tính Det A

$\det(A) = -57$ (≠ 0 có A^{-1})

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times P_A$$

Tìm ma trận phụ hợp P_A (vuông cùng cấp A)

$$P_A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T$$

Tính phần bù đại số dòng 1

$$\begin{cases} A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 3 \\ A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -17 \\ A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -5 \end{cases}$$

dòng 2

$$\begin{cases} A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = -27 \\ A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 20 \\ A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 26 \end{cases}$$

dòng 3

$$\begin{cases} A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 12 \\ A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -11 \\ A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -20 \end{cases}$$

Vậy $P_A = \begin{pmatrix} 3 & -17 & -5 \\ -27 & 20 & 26 \\ 12 & -11 & -20 \end{pmatrix}^T$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -27 & 12 \\ -17 & 20 & -11 \\ -5 & 26 & -20 \end{pmatrix}$$

Thứ ngày tháng năm

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot P_A$$

$$= \frac{1}{-57} \begin{pmatrix} 3 & -27 & 12 \\ -17 & 20 & -11 \\ -5 & 26 & -20 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3/57 & 27/57 & -12/57 \\ 17/57 & -20/57 & 11/57 \\ 5/57 & -26/57 & 20/57 \end{pmatrix}$$

Hỏi thêm: Với Ma trận A như trên. Tìm phần tử nằm ở dòng 3 và cột 2 của A^{-1} (thi rồi)

Bấm Casio ra A^{-1} suy ra phần tử $\left(A^{-1}\right)_{3\times 2} = \frac{-26}{57}$

Ví dụ "Thi rồi"

1. Cho 2 ma trận $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 4}$

phần tử thuộc hàng 2 cột 1 của ma trận tích AB là

$$A.B = \begin{pmatrix} a+2b+3c & 3a+2b+c & 2a+b+4c & 1a+b+5c \\ x+2y+3z & 3x+2y+z & 2x+y+4z & x+y+5z \\ 14 & 10 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

A. $x + 2y + 3z$

VIBOOK INTERNATIONAL

Thứ ngày tháng năm

2. Ma trận X sao cho $X\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

A $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} -5 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & -8 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 5 & -8 & 9 \end{pmatrix}$

3. Định thức của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & w^2 & w \\ 1 & 1 & -w^2 \\ 0 & w & 1 \end{pmatrix}$ vs $w^3 = 1$
Với w là số thực

A -1 B 2 C -2 D 3

4. Nếu $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & z & 9 \end{vmatrix} = -2$ thì $\begin{vmatrix} 0 & x & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & y & 2 & 4 \\ 0 & z & 2 & 9 \end{vmatrix}$

A 6 B 12 C -12 D 2

2/ Giải

Gọi $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Với $X.A = B$ tìm mt X

Do $\det(A) = 1 \neq 0$

$\Rightarrow \det(A) \neq 0$

$\Rightarrow A^{-1} =$

Muốn tìm mt X thì khử A: nhân bên phải 2 vế cho A^{-1}

$\Rightarrow (X.A)A^{-1} = B.A^{-1}$

$\Leftrightarrow X(A.A^{-1}) = B.A^{-1}$

$\Leftrightarrow X.I = B.A^{-1}$

$\Rightarrow X = B.A^{-1}$

Casio $= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & -8 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

Thứ ngày tháng năm

3. $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & w^2 & w \\ 1 & 1 & -w^2 \\ 0 & w & 1 \end{vmatrix}$

$= 1 + 0 + w^2 - 0 + w^3 - w^2 = 1 + 1 = 2$

4. Gọi $D = \begin{vmatrix} 0 & x & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & y & 2 & 4 \\ 0 & z & 2 & 9 \end{vmatrix}$

$= 0 + (-1)^{2+1} . 3 \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y & 2 & 4 \\ z & 2 & 9 \end{vmatrix} + 0 + 0$

$= (-3) . 2 \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & 4 \\ z & 1 & 9 \end{vmatrix}$

$= -(-3) . 2 \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & y & 4 \\ 1 & z & 9 \end{vmatrix}$ chỉ $c_1 \to c_2$ thêm dấu trừ

$= 12$

IV. Thủ thuật

Cho $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ có $\det(A) = ad - bc \neq 0$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} . \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$